Bestimmung der Messunsicherheit

1 Arten der Messabweichungen

1.1 Grobe Abweichungen

Ursachen	• Versehen des Beobachters bei Bedienung/Ablesung der Messinstrumente • Irrtum des Beobachters bei Protokollierung/Auswertung der Messwerte • Messverfahren oder Messbedingungen ungeeignet

Grobe Abweichungen müssen durch Sorgfalt und Kontrolle vermieden werden. Daher ist zu jeder Messung **mindestens eine Kontrollmessung**, möglichst durch eine zweite Person, durchzuführen.
Grob fehlerhafte Werte einer Messreihe, die um mehr als 3 ×Standardabweichung s vom Mittelwert abweichen, sind unter Angabe möglicher Ursachen der Abweichung zu streichen.

1.2 Systematische Abweichungen

Systematische Abweichungen beeinflussen das Messergebnis unter identischen Messbedingungen stets in gleichem Sinne. Bei Wiederholung einer Messung unter gleichen Bedingungen sind sie **nach Betrag und Vorzeichen konstant**, können also durch Wiederholung der Messung weder erkannt noch vermieden werden.

Ursachen	Beispiele
• Unvollkommenheit der Messgeräte	Eich- und Justierfehler Nullpunktsdrift, Nichtlinearität Alterung, Reibung, Korrosion, Lagerspiel
• Rückwirkung des Messgerätes auf das Messobjekt	Verformung Innenwiderstand, Eigenverbrauch
• Umwelteinflüsse	Luftauftrieb, Kapillareffekte Temperatur, elektromagnetische Felder
• Voreingenommenheit des Experimentators	
• Überschreiten der Gültigkeitsgrenzen physikalischer Gesetze	

Systematische Abweichungen sind prinzipiell erfassbar (z. B. durch Variation der Messmethode oder der Messbedingungen oder durch Nacheichung) und können damit durch **Korrektion** der Messergebnisse ausgeschaltet werden.

➔ **Bekannte** systematische Abweichungen

Unter Praktikumsbedingungen ist dies jedoch nicht möglich bzw. zu aufwendig.

➔ **Unbekannte** systematische Abweichungen

Der Größtbetrag unbekannter systematischer Abweichung wird abgeschätzt und geht mit unbestimmtem Vorzeichen (±) in die Messunsicherheit Δx ein.

1.3 Zufällige Abweichungen

Zufällige Abweichungen beeinflussen das Messergebnis unter identischen Messbedingungen stochastisch bzgl. seines Betrags und Vorzeichens. Positive und negative Abweichungen sind gleich wahrscheinlich.

Subjektive Ursachen	Objektive Ursachen
Ableseabweichungen (Parallaxe)	Schwankung der Umgebungsbedingungen (p, T, U)
Unsicherheit der Skaleninterpolation	Schwankung der Messgeräteeigenschaften (Reibung)
Reaktionsvermögen	Statistischer Charakter der Messgröße (Druck in Gasen, Rauschen, Quantenfluktuationen)

Zufällige Abweichungen sind **unvermeidlich und nicht exakt erfassbar**, für sie können nur **Wahrscheinlichkeitsaussagen** auf der Basis von **Vielfach**messungen unter gleichen Messbedingungen getroffen werden.

2 Rechnerische Erfassung der Messabweichungen

Gliederung:

2.1 Einmalige direkte Messung
2.2 Einmalige indirekte Messung
2.3 Mehrmalige direkte Messung
2.4 Mehrmalige indirekte Messung

2.1 Einmalige direkte Messung: Messgröße x ist die gesuchte Ergebnisgröße

Die <u>maximale</u> Messunsicherheit Δx der Messgröße x ergibt sich durch lineare Addition der abgeschätzten Größtwerte der unbekannten systematischen und der zufälligen Abweichung:

$$\boxed{\Delta x = \Delta x_{sys} + \Delta x_{zuf}} \qquad (1)$$

Abschätzung des <u>Größt</u>werts der unbekannten systematischen Abweichung:

- Eich-, Verkehrsfehlergrenzen von Messmitteln nach DIN, Eichordnung o. ä. (siehe Aushänge im Praktikumsraum)
- Herstellerangaben in den Bedienungsanleitungen am Arbeitsplatz
- Genauigkeitsklassen von Analog-Messgeräten, z. B. 1,5 $\Rightarrow$ Abweichung 1,5 % des Messbereichs-Endwerts

Grobe Abschätzung der zufälligen Abweichung:

- Bei analogen Messgeräten aus Ablese- und Interpolations-Unsicherheiten $\Delta x_{zuf} \geq 0{,}5 \times$ Wert der kleinsten Skalenteilung (z. B. 0,5 mm für Lineale).
- Bei digitalen Messgeräten aus den die systematischen Abweichungen übersteigenden Schwankungen des Anzeigewertes.

Sind im Aushang und am Arbeitsplatz keine Angaben über systematische Abweichungen zu finden, wird bei Analog-Messgeräten $\Delta x \geq 1 \times$ Wert der kleinsten Skalenteilung gesetzt.

Das Messergebnis ist in der Form ($x \pm \Delta x$) anzugeben, bei einer Strommessung z. B. als

$$\boxed{\text{Diodenstrom } I = (23{,}5 \pm 2{,}3)\ \text{mA}}$$

Die Messunsicherheit Δx wird auf maximal 2 Ziffern $\neq 0$ gerundet, der Zahlenwert der Messgröße x ist auf die gleiche Dezimalstelle zu runden.

Neben der absoluten Messunsicherheit Δx kann noch die
relative Messunsicherheit $\Delta x/x$ oder die
prozentuale Messunsicherheit $(\Delta x/x)\cdot 100\%$
angegeben werden.

2.2 Einmalige indirekte Messung:

Ergebnisgröße e ist Funktion der Messgrößen x, y, z: $e = f(x, y, z)$

Der Größtwert der Messunsicherheit errechnet sich nach dem **linearen Fortpflanzungsgesetz**

$$\boxed{\Delta e = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \cdot \Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \cdot \Delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| \cdot \Delta z} \tag{2}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ - partielle Ableitungen

$\Delta x, \Delta y, \Delta z$ - Messunsicherheiten der Messgrößen

Beispiel: Dichte einer Kugel

$$\rho = \frac{m}{\pi \cdot d^3/6} \qquad \Delta\rho = \left|\frac{\partial\rho}{\partial m}\right| \cdot \Delta m + \left|\frac{\partial\rho}{\partial d}\right| \cdot \Delta d = \frac{6}{\pi \cdot d^3} \cdot \Delta m + \left|\frac{6 \cdot m}{\pi} \cdot \left(-\frac{3}{d^4}\right)\right| \cdot \Delta d$$

Spezialfälle

Absolute Messunsicherheit einer **Summe oder Differenz**	**Relative** Messunsicherheit eines **Potenzprodukts**
$e = C\cdot(x \pm y) \Rightarrow \Delta e = C\cdot(\Delta x + \Delta y)$	$e = \frac{x^\alpha \cdot y^\beta}{z^\gamma} \Rightarrow \left|\frac{\Delta e}{e}\right| = \left|\alpha \cdot \frac{\Delta x}{x}\right| + \left|\beta \cdot \frac{\Delta y}{y}\right| + \left|\gamma \cdot \frac{\Delta z}{z}\right|$

Diese Formeln sollten **nicht** benutzt werden, wenn die gleiche Größe (unkürzbar) in Zähler und Nenner auftaucht, z. B. $G = B \cdot \frac{s - e}{s + e}$.

Verfahrensweise im Praktikum:

- Für jede Ergebnisgröße ist das Fortpflanzungsgesetz abzuleiten, seine einzelnen Summanden sind formel- und zahlenwertmäßig zu berechnen und im Protokoll anzugeben, ebenso deren Summe, die gesuchte absolute Messunsicherheit.
- Bei **funktionalen Abhängigkeiten** $y = f(x)$, die graphisch dargestellt werden, sind die Messunsicherheiten je eines Wertepaares x, y am unteren und oberen Endes des Wertebereichs zu berechnen und als Balken an die Kurvenpunkte anzutragen.
- Die Messunsicherheit durch **lineare Regression** berechneter Größen wird aus der Unsicherheit ΔA des Anstiegs A der Geraden berechnet, die aus A und dem Korrelationskoeffizienten r nach der Beziehung

$$\boxed{\Delta A = t_{V,n-1} \cdot \sqrt{\frac{1}{n-2} \cdot \frac{A^2 \cdot (1-r^2)}{r^2}}} \qquad (3)$$

oder mit Hilfe der Praktikumsprogramme (FA, FB) oder **näherungsweise** aus der größten auftretenden Abweichung Δy eines Messpunkts von der Ausgleichsgeraden nach der Beziehung

$$\boxed{\frac{\Delta A}{A} = \frac{2 \cdot \Delta y}{y_2 - y_1}} \qquad (4)$$

bestimmt wird. y_1 und y_2 sind die obere und untere Grenze des y - Messbereichs.

2.3 Mehrmalige direkte Messung

Erfassung der **zufälligen** Abweichungen (Fehlerstatistik)

Das Verteilungsgesetz der zufälligen Abweichungen

- der Messwerte x_i einer Stichprobe vom Mittelwert $\overline{x}$ und vom Erwartungswert μ
- der Mittelwerte $\overline{x}$ mehrerer Stichproben vom Erwartungswert μ

genügt offensichtlich folgenden Bedingungen:

① Gleich große positive und negative Abweichungen sind gleich wahrscheinlich
➔ Die Verteilung ist symmetrisch.

② Kleine Abweichungen sind wahrscheinlicher als große.

③ Die Wahrscheinlichkeit, dass die Abweichung zwischen 0 und $\pm\infty$ liegt, ist 1.

Diese Bedingungen erfüllen die Normal- und die t-Verteilung.

2.3.1 Gaußsche Normalverteilung

in standardisierter (normierter) Form

$$\boxed{p(u) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}}}$$ mit $\boxed{u = \frac{x - \overline{x}}{\sigma}}$ oder $u = \frac{\overline{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ (5)

$\overline{x}$ - Mittelwert
μ - Erwartungswert
σ - Standardabweichung σ^2 - Dispersion, Varianz

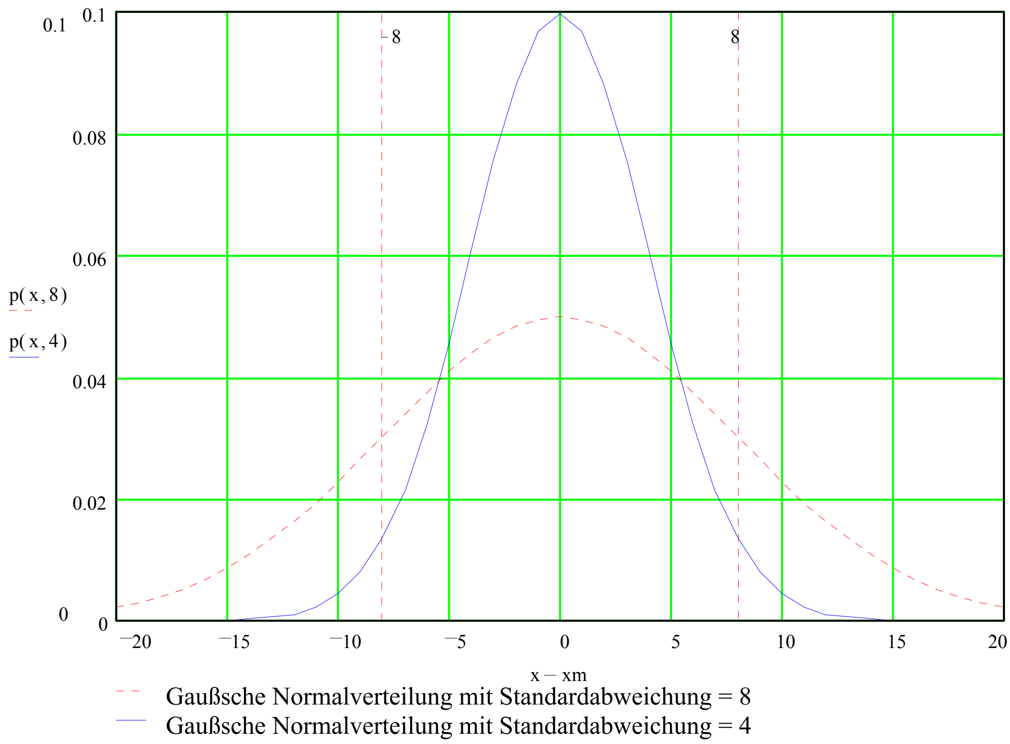

Bild 1: Gaußsche Normalverteilung

Der (arithmetische) **Mittelwert** ist der Schätzwert für den Erwartungswert einer Messgröße und ergibt sich aus der Forderung

$$\sum_n (x_i - \overline{x})^2 \Rightarrow \text{Minimum} \quad \rightarrow \quad \boxed{\overline{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i} \quad (6)$$

Die **Standardabweichung σ** charakterisiert die Streuung der Grundgesamtheit aller Messwerte um den Erwartungswert und ist in der Regel nicht bekannt. Als Maß für die Streuung der n Messwerte einer **Stichprobe** um den Mittelwert wird die **empirische Standardabweichung s** benutzt:

$$\boxed{s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n - 1}}} \quad (7)$$

Die empirische Standardabweichung s (auch mit σ_{n-1} bezeichnet) ist die mittlere (quadratische) **Abweichung der Einzelmesswerte vom Mittelwert.**

Der Nenner ist wegen des Verlustes eines Freiheitsgrades infolge Mittelwertbildung nach (6) um 1 verringert.

Die mittlere (quadratische) **Abweichung des Mittelwerts** der Stichprobe **vom** (unbekannten) **Erwartungswert** (wahren Wert) ergibt sich durch Anwendung des quadratischen Fortpflanzungsgesetzes der Messunsicherheiten (13) auf $\overline{x}$ mit $\Delta x_i = s$ zu

$$\boxed{\overline{s} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n \cdot (n-1)}}} \qquad (8)$$

Die Größen $t = \frac{x - \overline{x}}{s}$ und $t = \frac{\overline{x} - \mu}{\overline{s}}$ gehorchen jedoch <u>keiner</u> Normalverteilung, da zwar der Zähler, nicht aber der Nenner normalverteilt ist. Sie gehorchen einer t-Verteilung mit $\nu = n - 1$ Freiheitsgraden, die sich allerdings mit wachsendem ν bzw. n der standardisierten Normalverteilung annähert.

2.3.2 Studentsche t-Verteilung (Student = Gosset 1908)

$$\boxed{p(t) = \frac{1}{\sqrt{\nu \cdot \pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\nu + 1/2\right)}{\Gamma\left(\nu/2\right)} \cdot \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}} \quad \text{mit } \boxed{t = \frac{\overline{x} - \mu}{\overline{s}}} \quad \text{oder } t = \frac{x - \overline{x}}{s} \qquad (9)$$

ν = n - 1 Zahl der Freiheitsgrade
Γ(k) Gammafunktion

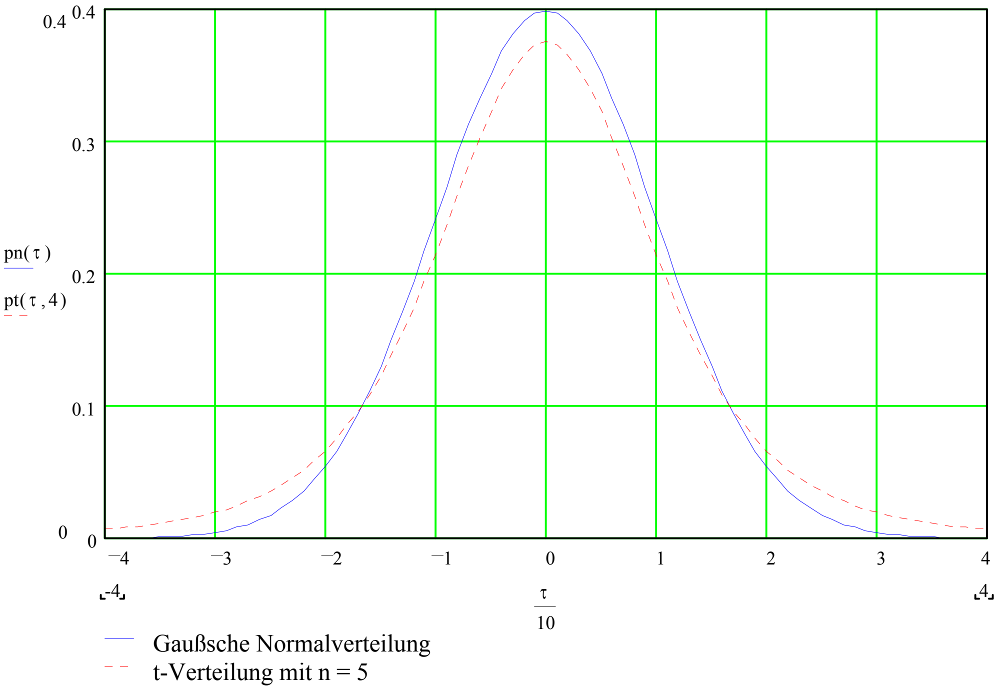

Bild 2: t-Verteilung und Normalverteilung

Die t-Verteilung ist symmetrisch zu t = 0, hängt von der Zahl der Freiheitsgrade ν ab und nähert sich mit wachsendem ν bzw. n der standardisierten Normalverteilung an (s. Bild 2).

2.3.3 Vertrauensbereich, Vertrauensniveau

Der **Vertrauensbereich** ist der Bereich um den Mittelwert $\overline{x}$ zwischen den beiden **Vertrauensgrenzen** $\pm t_V \cdot \overline{s}$, in dem der Erwartungswert mit einer Wahrscheinlichkeit (genannt **Vertrauensniveau**) von

$$P(t_V) = (1-\alpha) = \int_{-t_V}^{+t_V} p(t)\,dt$$

α - Irrtumswahrscheinlichkeit

$$t = \frac{\overline{x} - \mu}{\overline{s}}$$

zu finden ist. Der **t-Faktor t_V** hängt einerseits vom angestrebten Vertrauensniveau $(1 - \alpha)$, außerdem jedoch von der Zahl der Freiheitsgrade ν bzw. von der Anzahl n der Messungen ab und kann Tabellen der integralen t-Verteilungsfunktion oder nachstehender Tabelle entnommen werden. Die letzte Zeile gibt die Faktoren bei Normalverteilung an.

Zahl der Messungen	**t - Faktor t_V**			
	68,26%	95 %	99 %	99,73 %
3	1,32	4,30	9,93	19,21
5	1,15	2,78	4,60	6,62
8	1,08	2,37	3,50	4,53
10	**1,06**	**2,26**	**3,25**	**4,09**
50	1,01	2,01	2,68	3,16
100	1,00	1,98	2,63	3,08
∞	1,00	1,96	2,58	3,00

Die **zufällige** Komponente der Messunsicherheit errechnet sich dann zu

$$\boxed{\Delta\overline{x}_{zuf} = t_V \cdot \overline{s}} \qquad (10)$$

Das Vertrauensniveau ist stets anzugeben!
Unter Experimentbedingungen im Bereich der Naturwissenschaften und Technik wird in der Regel ein **Vertrauensniveau von 95% oder 99,73%** benutzt. Den Rechenprogrammen im Praktikum liegt ein Vertrauensniveau von 99,73% zugrunde.

Unter Einbeziehung des nach 2.1 abgeschätzten Größtwerts der systematischen Abweichung ergibt sich die maximale **Gesamt-Messunsicherheit** durch **lineare Addition** zu

$$\boxed{\Delta\overline{x} = t_V \cdot \overline{s} + \Delta x_{sys}} \qquad (11)$$

Ist die systematische Abweichung sehr genau mit einem der zufälligen Abweichung vergleichbaren Vertrauensniveau bekannt, kann die Gesamt-Messunsicherheit durch **quadratische Addition** berechnet werden:

$$\boxed{\Delta\overline{x} = \sqrt{\left(t_V \cdot \overline{s}\right)^2 + \Delta x_{sys}^2}} \qquad (12)$$

Bei quadratischer Addition ergibt sich stets eine <u>kleinere</u> Messunsicherheit als bei linearer Addition.

2.4 Mehrmalige indirekte Messung

Wurden die Messunsicherheiten $\Delta\overline{x}, \Delta\overline{y}, \Delta\overline{z}$ für jede Messgröße x, y, z durch **lineare** Addition der zufälligen Abweichungen und der abgeschätzten Größtwerte der systematischen Abweichungen nach (11) bestimmt, ist der **Größtwert** der Unsicherheit $\Delta\overline{e}$ des Mittelwerts der Ergebnisgröße e **nach dem linearen Fortpflanzungsgesetz** (2) zu berechnen.
Das **Vertrauensniveau** muss für alle zufälligen Abweichungen **gleich** sein und stets **angegeben werden**.

Wurden die Messunsicherheiten $\Delta\overline{x}, \Delta\overline{y}, \Delta\overline{z}$ für jede Messgröße x, y, z durch **quadratische** Addition der zufälligen und der systematischen Abweichungen gleichen Vertrauensniveaus nach (12) bestimmt oder ist die systematische Abweichung wegen ihrer Kleinheit vernachlässigt worden, wird die Unsicherheit $\Delta\overline{e}$ des Mittelwerts der Ergebnisgröße e **nach dem quadratischen (Gaußschen) Fortpflanzungsgesetz** (13) berechnet.

$$\boxed{\Delta\overline{e} = \sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta\overline{x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y} \cdot \Delta\overline{y})^2 + (\frac{\partial f}{\partial z} \cdot \Delta\overline{z})^2}} \qquad (13)$$

Die nach dem quadratischen Fortpflanzungsgesetz berechnete Unsicherheit $\Delta\overline{e}$ ist stets <u>kleiner</u> als die nach dem linearen Fortpflanzungsgesetz berechnete.